OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER, 1897. Nr. 2.

Entydige Løsninger af Ligningen
$\overset{\nu}{f}(x) + \overset{\nu}{f}(x+\omega) = 1$, ν rational.

Af

Dr. Niels Nielsen.

§ 1.

Den entydige Løsnings almindelige Form.

1. I min Doktordisputats § 11 har jeg bestemt de meromorfe Løsninger af en for *cot x* karakteristisk Fundamentalligning, der, som jeg senere har set, er et yderst specielt Tilfælde af de Fundamentalligninger, Mellin[1]) har betragtet.

Paa de følgende Sider, skal jeg give Løsningen af et — formelt — nærbeslægtet Problem, der ligeledes beskæftigede mig for flere Aar siden, og som jeg ikke endnu har set andre omtale, nemlig:

Bestemmelsen af de meromorfe Funktioner, der tilfredsstille Ligningen

$$f^{\nu}(x) + f^{\nu}(x+\omega) = 1, \tag{1}$$

hvor ω er en Konstant, og ν et rationalt Tal.

Dette Problem kan dog strax simplificeres betydelig. Hvis ν nemlig er en uforkortelig Brøk $\frac{p}{q}$, vil Substitutionen

$$f(x) = g^{q}(x)$$

transformere (1) til en Ligning af samme Form, men hvori Ex-

[1]) Acta Mathematica, Bd. XV.

ponenten er positiv, hel. Vort egentlige Problem bliver da Løsningen af denne Ligning af mere speciel Form. Vi antage derfor altid i det følgende ν positiv, hel, naar andet ikke udtrykkelig siges.

Inden vi gaa over til Løsningen af dette vort Problem, er det Ulejligheden værd at forudskikke en Bemærkning om de fundne Resultater, der i Virkeligheden i sig rumme en ikke ubetydelig Del af den elementære Analyse.

For $\nu = 2$ udtykker (1) en fundamental Egenskab ved $\sin x$. Ved selve denne Ligning kan man nu i Virkeligheden ogsaa entydig definere $\sin x$, som Art. 6 viser. Ved Art. 6 faa vi da strax alle de fundamentale Egenskaber ved de trigonometriske Funktioner og ved e^x. Endelig giver Art. 9 os Weiertrass's elliptiske Funktion pu som en simpel Udvidelse af $\cot x$.

Vi ville dog ikke ofre Tid og Plads paa en detailleret Udvikling af denne Theori, men indskrænke os til at skitsere den ved selve vor Løsning af (1).

2. Af (1) udleder man uden Vanskelighed de følgende Sætninger, som senere ville blive os til Nytte.

1°. Den vilkaarlige, entydige Løsning $f(x)$ har Perioden $2n\omega$, hvor n er en Divisor i ν.

Sætter man nemlig i (1) $x + \omega$ for x, faar man

$$f(x + 2\omega) = \lambda \,.\, f(x), \tag{2}$$

hvor λ er en vilkaarlig Rod i Ligningen

$$z^\nu = 1.$$

Definere vi nu videre Funktionen $\varphi(x)$ ved Ligningen

$$\varphi(x) = \frac{f(x + \omega)}{f(x)},$$

faa vi let af (2)

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x + \omega) &= \frac{\lambda}{\varphi(x)} \\ \varphi(x + 2\omega) &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Antage vi endelig, at $\varphi(x)$ er lige eller ulige, faa vi af den første (3) henholdsvis

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\lambda},\ \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{-\lambda}.$$

2°. Hvis $f(x)$ er en fuldstændig vilkaarlig Løsning af (1), ere Nulpunkterne for $\varphi(x)$ de samme som Nulpunkterne for $f(x+\omega)$ og Uendelighedspunkterne for $\varphi(x)$ de samme som Nulpunkterne for $f(x)$.

(1) viser nemlig, at

$$f(x) = 0 \text{ og } f(x+\omega) = 0$$

ikke kunne have fælles Rødder. Hvis ε endelig er en vilkaarlig Rod i

$$f(x) = \infty,$$

faa vi af (1)

$$\varphi(\varepsilon) = (-1)^{\frac{1}{\nu}},$$

og vort Postulat er saaledes bevist.

3°. $\varphi(x)$ har paa hver Periodestrimmel lige mange Nul- og Uendelighedspunkter, og det saaledes at Uendelighedspunkterne for $\varphi(x)$ og $\frac{1}{\varphi(x)}$ parvis ere af ganske den samme Natur; $f(x)$ er en vilkaarlig Løsning af (1)[1].

Sætningen er en umiddelbar Følge af den foregaaende.

4°. Hvis $f(x)$ er en hel, transcendent Funktion, der har lutter uendelig fjærne Nulpunkter, er $f(x)$ en Konstant.

Sætningen er i Følge (1) en umiddelbar Konsekvens af Picard's Theorem.

3. Hvis $f(x)$ paa enhver af Periodestrimlerne, hvori vi tænke os Planen delt af Paralleler gennem Punkterne $2m\omega$, har n Nulpunkter, sige vi, at $f(x)$ er af Ordenen n, og betegne den ved $f_n(x)$. Den tilsvarende Funktion $\varphi(x)$ betegnes $\varphi_n(x)$.

De Nulpunkter og Poler, der falde paa Periodestrimlen svarende til $m = 0$ og $m = 1$ eller paa den første af de begrænsede Paralleler, kaldes principale.

[1]) Exemplet til Thesis I i min Doktordisputats.

Med disse Betegnelser faa vi da den følgende Sætning, hvor $f_n(x)$ antages meromorf i hele Planen:

Hvis $f_n(x)$ har de principale Nulpunkter

$$\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \ldots\, \alpha_n\,, \tag{α}$$

der kunne være forskellige eller sammenfaldende, endelige eller uendelig fjærne, er

$$\varphi_n(x) = \left((-1)^n \lambda\right)^{\frac{1}{2}} \prod_1^n \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - \alpha_\mu); \tag{4}$$

hvor λ har den i Art. 2 angivne Betydning.

Af Art. 2 se vi nemlig, at de to meromorfe Funktioner

$$\varphi_n(x) \text{ og } \prod_1^n \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - \alpha_\mu)$$

i hele den uendelige Plan blive 0 og ∞ for de samme og kun de samme Værdier af x og stedse af samme Orden; altsaa faa vi i Følge Liouville's Theorem

$$\varphi_n(x) = k \prod_1^n \cot \frac{\pi}{2\omega}(x - \alpha_\mu)\,,$$

hvor k er en Konstant, der let bestemmes ved (3), og altsaa er (4) bevist.

Af (4) se vi strax, at uendelig fjærne principale Nulpunkter for $f_n(x)$ kunne lades ude af Betragtning, og at $f_n(x)$ er en Konstant, hvis alle dens principale Nulpunkter ere uendelig fjærne.

Picard's Sætning tør altsaa udvides til ogsaa at gælde for disse Funktioner.

Af Definitionen for $\varphi_n(x)$ faa vi nu videre ved (4)

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[\nu]{1 + \left((-1)^n \lambda\right)^{\frac{\nu}{2}} \prod_1^n \cot^\nu \frac{\pi}{2\omega}(x - \alpha_\mu)}}\,, \tag{5}$$

der dog i Almindelighed ikke er entydig, naar $\nu > 1$. For at $f_n(x)$ kan blive entydig, maa vi endnu bestemme Nulpunkterne (α), saaledes at Nævneren i (5) enten faar alle sine Nulpunkter uendelig fjærne ($f_n(x)$ holomorf i hele Planen), eller ν-dobbelte ($f_n(x)$ meromorf i hele Planen).

§ 2.

Bestemmelse af de holomorfe Løsninger.

4. For at bestemme de holomorfe Løsninger (5) ville vi omskrive Nævneren og sætte da

$$z = cot \frac{\pi x}{2\omega} \tag{β}$$

$$a_r = \Sigma \; cot \frac{\pi \alpha_1}{2\omega} . cot \frac{\pi \alpha_2}{2\omega} \ldots . \; cot \frac{\pi \alpha_r}{2\omega} \tag{γ}$$

$$P_n(z) = a_n - a_{n-1} z + a_{n-2} z^2 - \ldots + (-1)^{n-1} a_1 z^{n-1} + (-1)^n z^n . \tag{δ}$$

Ved Hjælp af Additionstheoremet for $cot\, x$ kan (5) med disse Betegnelser skrives som

$$f_n(x) = \frac{P_n(z)}{\sqrt[\nu]{P_n^\nu(z) + ((-1)^n \lambda)^{\frac{\nu}{2}} z^{n\nu} P_n^\nu\left(-\frac{1}{z}\right)}} . \tag{6}$$

Nu har man

$$cot\,(\alpha \pm i\,\infty) = \pm i,$$

hvor α er vilkaarlig, endelig. Skal altsaa $f_n(x)$ være holomorf i hele Planen, maa Nævneren i (6) kun blive 0 for $z = \pm i$.

Antages $\nu > 1$, deler venstre Side i Ligningen

$$P_n^\nu(z) + ((-1)^n \lambda)^{\frac{\nu}{2}} z^{n\nu} P_n^\nu\left(-\tfrac{1}{z}\right) = 0 \tag{7}$$

sig i ν indbyrdes primiske Faktorer af Formen

$$P_n(z) - \mu\, ((-1)^n \lambda)^{\frac{1}{2}} z^n P_n\left(-\tfrac{1}{z}\right) \tag{8}$$

hvor μ er en vilkaarlig Rod i Ligningen

$$x^\nu = -1.$$

For at $f_n(x)$ skal blive holomorf, maa altsaa enhver af Faktorerne (8) være af Formen

$$A . (z \pm i)^n ,$$

hvor A er en Konstant.

Ved denne Betragtning faa vi da strax de følgende Sætninger

1°. (1) har ingen holomorf Løsning, hvis $\nu > 2$.

2°. Hvis ν er en uforkortelig Brøk $\frac{p}{q}$, blive de holomorfe Løsninger af (1) q^{te} Potenser af de holomorfe Løsninger af den samme Ligning for $\nu = p$.

3°. Hvis ν er negativ, har (1) ingen holomorfe Løsninger.

I modsat Fald maatte man nemlig have

$$P_n(z) = A . (z \pm i)^n,$$

altsaa $P_n(z)$ og $z^n P_n\left(-\frac{1}{z}\right)$ identiske paa en konstant Faktor nær.

Vi have da kun tilbage at betragte de to Tilfælde $\nu = 1$ og $\nu = 2$.

5. $\nu = 1$. For at $f_n(x)$ skal blive holomorf i hele Planen, maa Koefficienterne a_r (γ) bestemmes, saaledes at Ligningerne

$$P_{2m}(z) + (-1)^{m-k} z^{2m} P_{2m}\left(-\frac{1}{z}\right) = A . (z + i)^{2m-k} (z - i)^k$$

eller

$$P_{2m+1}(z) + (-1)^{m-k-1} i z^{2m+1} P_{2m+1}\left(-\frac{1}{z}\right)$$
$$= A . (z + i)^{2m-k+1} (z - i)^k,$$

eftersom n er lige eller ulige, blive identiske. Alle andre Ligninger af samme Form, men med et andet Fortegn mellem Leddene paa venstre Side kunne ikke være identiske, hvilket man let beviser ved for z at sætte $-\frac{1}{z}$ og reducere.

6. $\nu = 2$. Den eneste holomorfe Løsning af (1) bliver

$$f_n(x) = \pm \sin \frac{\pi}{2\omega} (nx - \alpha), \tag{9}$$

hvor n er positiv, hel og ulige, og α en vilkaarlig Konstant.

Man ser let, at Kombinationerne

$$\lambda = +1, \quad n = 2m$$
$$\lambda = -1, \quad n = 2m$$
$$\lambda = +1, \quad n = 2m + 1$$

ere umulige, naar $f_n(x)$ i (6) skal være holomorf i hele Planen. Ligningerne

$$P_{2m}(z) + i z^{2m} P_{2m}\left(-\frac{1}{z}\right) = A \,.\, (z \pm i)^{2m}$$

$$P_{2m}(z) + (-1)^{m-1} z^{2m} P_{2m}\left(-\frac{1}{z}\right) = A \,.\, (z \pm i)^{2m}$$

$$P_{2m+1}(z) + z^{2m+1} P_{2m+1}\left(-\frac{1}{z}\right) = A \,.\, (z \pm i)^{2m+1}$$

kunne nemlig enten slet ikke være identiske eller kun være det, naar

$$P_n(z) = B \,.\, (z \pm i)^n ,$$

hvor B er en Konstant.

Tilbage har man da kun Kombinationen

$$\lambda = -1, \quad n = 2m + 1,$$

og i dette Tilfælde kan man entydig bestemme Koefficienterne $a_r(\gamma)$, saaledes at Ligningerne

$$P_{2m+1}(z) + (-1)^{m+1} i z^{2m+1} P_{2m+1}\left(-\frac{1}{z}\right) = A \,.\, (z + i)^{2m+1}$$

$$P_{2m+1}(z) + (-1)^{m} i z^{2m+1} P_{2m+1}\left(-\frac{1}{z}\right) = \overline{A} \,.\, (z - i)^{2m+1},$$

hvor

$$A\overline{A} = 1,$$

samtidig blive identiske. Ved at sætte

$$A = \sin\frac{\pi\alpha}{2\omega} + i \cos\frac{\pi\alpha}{2\omega}$$

faar man da let (9).

Antager man i (9) $\alpha = 0$, faar man, idet r er ulige,

$$f_n(rx) = \pm \sum_{\mu=0}^{\frac{r-1}{2}} (-1)^{\mu} \binom{r}{2\mu} f_n(x)^{r-2\mu} f_n'^{2\mu}(x + \omega) . \qquad (10)$$

Man ser nemlig, at begge de holomorfe Funktioner i (10) ere Løsninger af Ordenen r. De maa altsaa i Følge (9) være identiske, da de have de samme Nulpunkter.

§ 3.

Bestemmelse af de meromorfe Løsninger.

7. For $\nu = 1$ er Løsningen (5) altid meromorf i hele Planen.

For at dette ogsaa skal blive Tilfældet for højere Værdier af ν, maa Nulpunkterne

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n$$

bestemmes saaledes, at alle Faktorerne (8) samtidig blive ν^{te} Potenser af hele rationale, indbyrdes primiske Polynomier i z.

Dette er imidlertid — som vi nedenfor skulle vise — umuligt, naar $\nu > 2$.

Lad os nemlig antage, at ν og ρ ere positive, hele Tal, at A og B ere to Konstanter, der begge have Modulus 1, og at ikke to af Polynomierne $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ og $z^{\nu\rho}P\left(-\frac{1}{z}\right)$ have nogen fælles Faktor; da faa vi Sætningen:

Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} P_{\nu\rho}(z) + Az^{\nu\rho}P_{\nu\rho}\left(-\tfrac{1}{z}\right) &= Q_\rho^\nu(z) \\ P_{\nu\rho}(z) + Bz^{\nu\rho}P_{\nu\rho}\left(-\tfrac{1}{z}\right) &= R_\rho^\nu(z) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

kunne kun samtidig være identiske, naar

$$AB = (-1)^{\nu\rho} \qquad (\beta)$$

og tillige

$$R_\rho^\nu(z) = Bz^{\nu\rho}Q_\rho^\nu\left(-\tfrac{1}{z}\right). \qquad (\gamma)$$

Lad os nemlig antage, at Ligningerne (α) vare identiske. Vi kunne da af dem borteliminere $P_{\nu\rho}(z)$ og $z^{\nu\rho}P_{\nu\rho}\left(-\frac{1}{z}\right)$, hvorved vi faa den ny Identitet

$$Q_\rho^\nu(z) + Bz^{\nu\rho}Q_\rho^\nu\left(-\tfrac{1}{z}\right) = R_\rho^\nu(z) + Az^{\nu\rho}R_\rho^\nu\left(-\tfrac{1}{z}\right). \qquad (\delta)$$

Hvis nu λ_p og μ_p ere Rødder i henholdsvis $x^\nu = -A$ og $x^\nu = -B$, deler (δ) sig atter i ν Identiter af Formen

$$Q_\rho(z) - \mu_p z^\rho Q_\rho\left(-\tfrac{1}{z}\right) = C_p R_\rho(z) - C_p\lambda_p z^\rho R_\rho\left(-\tfrac{1}{z}\right), \qquad (\varepsilon)$$

hvor

$$p = 1, 2, 3, \ldots . \nu$$

og hvor Koefficienterne C_p ere Konstanter, der i Følge (δ) maa tilfredsstille Betingelsen

$$C_1 C_2 C_3 \ldots C_\nu = 1. \qquad (\zeta)$$

Adderes de ν Ligninger (ε), faar man

$$\nu Q_\rho(z) = R_\rho(z)\Sigma C_p - z^\rho R_\rho\left(-\tfrac{1}{z}\right)\Sigma C_p\lambda_p, \qquad (\eta)$$

hvoraf

$$\nu z^\rho Q_\rho\left(-\tfrac{1}{z}\right) = z^\rho R_\rho\left(-\tfrac{1}{z}\right)\Sigma C_p - (-1)^\rho R_\rho(z)\Sigma C_p\lambda_p. \qquad (\theta)$$

Indsættes Udtrykkene (η) og (θ) i (ε), vilde vi faa en homogen Ligning mellem $R_\rho(z)$ og $z^\rho R_\rho\left(-\frac{1}{z}\right)$. Da dette er umuligt, maa Koefficienterne blive 0, saa at vi faa

$$\Sigma C_p = \nu \frac{1+(-1)^{\rho-1}\lambda_p\mu_p}{1+(-1)^{\rho-1}\mu_p^2} C_p$$

$$\Sigma C_p \lambda_p = \nu \frac{\lambda_p - \mu_p}{1+(-1)^{\rho-1}\mu_p^2} C_p,$$

$$p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu,$$

hvoraf Proportionerne

$$\frac{\lambda_1-\mu_1}{1+(-1)^{\rho-1}\lambda_1\mu_1} = \frac{\lambda_2-\mu_2}{1+(-1)^{\rho-1}\lambda_2\mu_2} = \ldots$$

$$= \frac{\lambda_\nu-\mu_\nu}{1+(-1)^{\rho-1}\lambda_\nu\mu_\nu}.$$

Da Summen af alle disse Proportioners Forled er 0, maa Summen af Efterleddene ogsaa være 0, saa at man faar

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_\nu\mu_\nu = (-1)^\rho. \qquad (\iota)$$

Da

$$|\lambda_p\mu_p| = 1,$$

kan (ι) kun være mulig, naar

$$\lambda_p\mu_p = (-1)^\rho,$$

hvoraf man strax faar Betingelsen (β) og endvidere Formlerne

$$\Sigma C_p = 0$$

$$\Sigma C_p \lambda_p = \frac{(-1)^\rho \nu C_p}{\mu_p},$$

af hvilke den sidste atter giver

$$C_p = \alpha \cdot \mu_p,$$

hvor α er en Konstant. Ved (ζ) faar man dernæst

$$\alpha^\nu = \frac{(-1)^\nu}{B},$$

hvoraf

$$Q_\rho(z) = (-1)^{\rho-1}\alpha z^\rho R_\rho\left(-\frac{1}{z}\right)$$

$$z^\rho Q_\rho\left(-\frac{1}{z}\right) = -\alpha R_\rho(z),$$

af hvilke den sidste giver Betingelsen (γ), medens man af den første faar

$$C_{p}\lambda_p = (-1)^{\rho}\alpha,$$

og vore Postulater ere saaledes beviste.

Man ser let, at Ligningerne (α) virkelig samtidig ere identiske, naar Betingelserne (β) og (γ) ere opfyldte. Koefficienterne i $P_{\nu\rho}(z)$ kunne nemlig entydig bestemmes ved Koefficienterne i $Q_{\rho}(z)$, der paa den første nær kunne vælges abitrært.

Man beviser endvidere uden Vanskelighed den følgende Sætning:

Hvis ν er en uforkortelig Brøk $\frac{p}{q}$, blive alle de meromorfe Løsninger af (1) q^{te} Potenser af de meromorfe Løsninger af den samme Ligning for $\nu = p$.

Tilbage have vi altsaa kun at betragte Tilfældet $\nu = 2$.

8. For $\nu = 2$ er den almindelige Form for den meromorfe Løsning af (1)

$$f_{2n}(x) = \frac{Q_n^2\left(\cot\frac{\pi x}{2\omega}\right) + \varepsilon\cdot\cot^{2n}\frac{\pi x}{2\omega}\,Q_n^2\left(-tg\frac{\pi x}{2\omega}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}\cot^n\frac{\pi x}{2\omega}\,Q_n\left(\cot\frac{\pi x}{2\omega}\right)Q_n\left(-tg\frac{\pi x}{2\omega}\right)}, \tag{11}$$

hvor $\varepsilon = \pm i$, og $Q_n(z)$ er et vilkaarligt n^{te} Grads Polynomium i z.

Sætningen er en umiddelbar Følge af Art. 7. Af (11) faar man da let de følgende Sætninger:

1°. $f_{2n}(x)$ har $2n$ principale Poler, hvoraf ingen kunne være uendelig fjærne.

2°. n af de principale Poler (Nulpunkter) for $f_{2n}(x)$ kunne vælges abitrært. Ved dem bestemmes de øvrige n principale Poler (Nulpunkter) og de $2n$ principale Nulpunkter (Poler) entydig.

(11) kan imidlertid bringes paa en bekvemmere Form ved at indføre de abitræere, principale Poler. Lad disse være

$$\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_n$$

og lad os sætte

$$Q_n\left(cot\,\frac{\pi x}{2\omega}\right) = A\,.\prod_1^n\left(cot\,\frac{\pi x}{2\omega} - cot\,\frac{\pi\beta_\mu}{2\omega}\right),$$

hvor A er en Konstant, da faa vi efter en simpel Mellemregning

$$f_{2n}(x) = \frac{1+\varepsilon\prod\limits_1^n cot^2\frac{\pi}{2\omega}(x-\beta_\mu)}{2\sqrt{\varepsilon}\prod\limits_1^n cot\,\frac{\pi}{2\omega}(x-\beta_\mu)}, \tag{12}$$

der atter let giver Sætningen:

For $\nu = 2$ existerer der ingen meromorf Løsning af (1), som tilfredsstiller (10)

9. Vi have endnu tilbage at undersøge, om der existerer entydige Løsninger af uendelig høj Orden og sætte i dette Øjemed

$$\frac{a_\mu}{\omega} = \xi_\mu + i\,\eta_\mu,$$

hvor ξ_μ og η_μ ere reelle; endvidere antage vi, at Rækken

$$\sum_1^n \frac{1}{\eta_\mu^2}$$

har en endelig Sum, naar n voxer uden Grænse, da vil Produktet i Art. 3 for $\varphi_n(x)$, som bekendt, konvergere absolut for alle endelige Værdier af x, $a_1 a_2 \ldots$ undtagne. Og det vil nu ikke være forbundet med nogen Vanskelighed at danne de søgte meromorfe Løsninger af (1) af uendelig høj Orden.

Den ovenfor nævnte Betingelse vil være tilfredsstillet, hvis $f(x)$ har de principale Nulpunkter $2m\omega'$, hvor m skal gennemløbe alle hele Værdier fra $+\infty$ til $-\infty$, naar blot Forholdet $\frac{\omega'}{\omega}$ ikke er reelt. For at bruge de gængse Betegnelser sætte vi $\omega' = \omega_3$, $\omega = \omega_1$ og faa da

$$\varphi(x) = (\pm\lambda)^{\frac{1}{2}}\,\frac{\sqrt{\wp x - e_1}}{\sqrt{\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e_1}}, \tag{13}$$

hvoraf man let danner de entydige Løsninger af (1) for $\nu = 1$.

For $\nu = 2$ faar man ligeledes paa samme Maade ved Hjælp af Art. 8 den følgende Sætning:

Hvis $f(x)$ i et Periodeparallelogram har de arbitrære Poler

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n ,$$

faar man

$$f(x) = \frac{\left(p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e_1\right)^n + \varepsilon \prod_1^n \left(p\,(x-\beta_\mu) - e_1\right)}{2\sqrt{\varepsilon}\left(p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e_1\right)^{\frac{n}{2}} \prod_1^n \sqrt{p\,(x-\beta_\mu) - e_1}}, \tag{14}$$

hvor $\varepsilon = \pm i$, og hvor px er Weiertrass's elliptiske Funktion.

København, September 1896.

OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER, 1897. Nr. 2.

Théorème sur les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \sin 2\varphi d\varphi$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^p \sin 2\varphi d\varphi$.

Par

Niels Nielsen,

Docteur ès sciences.

§ 1.

Détermination de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \sin 2\varphi\, d\varphi$ et de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^p \sin 2\varphi\, d\varphi$.

1. Posons pour abréger

$$\beta(x) = -D_x \log B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$

et l'expression de *Gauss* pour la fonction $\Gamma(x)$ nous donne la formule

$$\beta(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \ldots,$$ [1]

d'où l'on tire

$$\beta(x+1) = \frac{1}{x} - \beta(x), \tag{α}$$

$$\beta^{(p)}(1) = (-1)^p p!\, \sigma_{p+1}, \tag{β}$$

[1]) La fonction $\beta(x)$ n'est autre chose que la fonction qui figure dans ma Thèse de doctorat sous la désignation $N(x)$ («numérique», parce qu'elle est fonction génératrice de certaines des séries numériques dont je m'occupe depuis plusieurs années). Cependant la désignation $\beta(x)$ proposée ici est, ce me semble, plus claire.

où l'on a posé

$$\sigma_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \cdots.$$

De la définition même de $\beta(x)$ on tire

$$D_x B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = - B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right)\beta(x), \tag{γ}$$

d'où, en différentiant plusieurs fois par rapport à x,

$$\left.\begin{aligned} D_x^2 B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= - B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\left(\beta'(x) - \beta^2(x)\right), \\ D_x^3 B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= - B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\left(\beta''(x) - 3\beta(x)\beta'(x) + \beta^3(x)\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

En mettant $x+1$ à la place de x, on tire de (γ) en vertu de (α)

$$D_x B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{x} B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\beta(x),$$

d'où, en différentiant plusieurs fois par rapport à x,

$$\left.\begin{aligned} &D_x^2 B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \frac{2}{x} D_x B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \\ &\quad = B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\left(\beta'(x) + \beta^2(x)\right), \\ &D_x^3 B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \frac{3}{x} D_x^2 B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \\ &\quad = B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\left(\beta''(x) + 3\beta(x)\beta'(x) + \beta^3(x)\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Posons maintenant

$$D_x^p B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = (-1)^p B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) F_p,$$

$$D_x^p B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{p}{x} D_x^{p-1} B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) G_p,$$

et les formules (1) et (2) nous donnent, par la conclusion habituelle de n à $n+1$, le théorème suivant:

F_p et G_p sont des polynômes entiers et homogènes du degré p en $\beta(x)$ et ses dérivées, si l'on suppose que $\beta^{(r)}(x)$ soit du degré $r+1$; et ces polynômes sont identiques, abstraction faite des signes de certains termes.

On trouve, par une méthode bien connue du calcul différentiel[1]), les formules

[1]) *Schlömilch:* Compendium der höheren Analysis, II, p. 4.

$$\left.\begin{aligned} G_p &= \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \binom{p}{\nu} g_{p-\nu}\beta^\nu(x) + \beta^p(x), \\ F_p &= \sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \binom{p}{\nu} f_{p-\nu}\beta^\nu(x) + \beta^p(x), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

où

$$\left.\begin{aligned} g_r &= D_x g_{r-1} + (r-1)\beta'(x) g_{r-2}, \\ g_2 &= \beta'(x), \\ g_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

et où f_r peut être déduit de g_r en y remplaçant $\beta^{(n)}(x)$ par $(-1)^n\beta^{(n)}(x)$.

2. Si la partie réelle de x est supposée positive, on a la formule

$$\int_0^1 \frac{c^{x-1}}{\sqrt{1-c^2}}\, dc = \frac{1}{2} B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right). \tag{δ}$$

En différentiant (δ) p fois par rapport à x, on obtient, après avoir posé $x = 1$ et $c = \sin 2\varphi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\left[D_x^p\, B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right]_{x=1}. \tag{5}$$

En vertu de la formule

$$B\left(\tfrac{x}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \frac{x+1}{x} B\left(\tfrac{x+2}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$

on tire en outre de (δ)

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - 1\right) c^{x-1} dc = \frac{1}{2} B\left(\tfrac{x+2}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{a_1}{1!} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{2!}x \\ + \frac{1}{2}\frac{a_3}{3!}x^2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{ε}$$

où

$$a_\mu = \left[D_x^\mu B\left(\tfrac{x+2}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right]_{x=0} = \left[D_x^\mu B\left(\tfrac{x+1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)\right]_{x=1}.$$

Différentions ensuite (ε) p fois par rapport à x, et nous aurons, après avoir posé $x = 0$ et $c = \sin 2\varphi$,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^p \sin 2\varphi\, d\varphi\\ &= \frac{1}{2p+2}\left[D_x^{p+1} B\left(\tfrac{x+1}{2},\tfrac{1}{2}\right) + \frac{p+1}{x} D_x^p B\left(\tfrac{x+1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right]_{x=1}.\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Or, si nous posons

$$A_p = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \sin 2\varphi\, d\varphi\,,$$

$$B_p = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^p \sin 2\varphi\, d\varphi\,,$$

les formules (5) et (6) nous donnent, en vertu du n° 1, ce théorème remarquable:

L'intégrale B_p est égale à un polynôme entier et homogène du degré $p+1$ en $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p+1}$, si l'on suppose que σ_n soit du degré n. L'intégrale B_p, au contraire, est égale à $(-1)^p \frac{p\pi}{2}$ multiplié par un polynôme qui se déduit de l'expression trouvée pour B_{p-1} en remplaçant σ_n par $(-1)^{n-1}\sigma_n$.

Il n'est pas sans intérêt, et pour l'homogénéité et pour la forme même des intégrales, de comparer ce théorème aux formules (10) et (11) de mon mémoire *„Sur la sommation de quelques séries“* [1]).

3. A l'aide des intégrales A_p et B_p on peut déterminer d'autres intégrales définies.

Ainsi, si nous posons pour abréger

$$I_q = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log\cos\varphi + \log\sin\varphi)^q \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi\,,$$

$$H_q = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log\cos\varphi + \log\sin\varphi)^q\, d\varphi\,,$$

---

[1]) Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1896, p. 358.

la formule du binôme nous donne

$$\left.\begin{aligned} B_p &= I_p + \binom{p}{1}\sigma_1 I_{p-1} + \binom{p}{2}\sigma_1^2 I_{p-2} + \dots \\ &\quad + \binom{p}{p-1}\sigma_1^{p-1} I_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{p+1}, \\ A_p &= H_p + \binom{p}{1}\sigma_1 H_{p-1} + \binom{p}{2}\sigma_1^2 H_{p-2} + \dots \\ &\quad + \binom{p}{p-1}\sigma_1^{p-1} H_1 + \frac{\pi}{4}\sigma_1^p; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

car on a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\sigma_1.$$

A l'aide des formules (7) on peut déterminer les intégrales I_p et H_p.

En vertu de (ε) on démontrera, par la conclusion habituelle de n à $n+1$, la formule remarquable

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi (\log\cos\varphi + \log\sin\varphi)^p d\varphi = \frac{1}{2p+2}\left(g_{p+1}(1) + (-1)^p \sigma_1^{p+1}\right), \quad (8)$$

où $g_{p+1}(1)$ *désigne la valeur qu'on obtient pour* g_{p+1} *en supposant* x *égal à l'unité.*

L'expression trouvée pour H_p, au contraire, deviendra beaucoup plus compliquée. On obtient en effet de la même manière

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log\cos\varphi + \log\sin\varphi)^p d\varphi \\ &= (-1)^p \frac{\pi}{4}\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=p-1} \binom{p}{\nu} 2^\nu \sigma_1^\nu f_{p-\nu}(1) + 2^p \sigma_1^p\right). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

On aura donc le théorème suivant:

La valeur de l'intégrale H_p *peut être déduite de l'expression trouvée pour* A_p *en y remplaçant* σ_1 *par* $2\sigma_1$.

On aura par exemple

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{4}\sigma_2 - \frac{1}{4}\sigma_1^2, \\ I_2 &= +\frac{1}{3}\sigma_3 - \frac{1}{6}\sigma_1^3, \\ I_3 &= -\frac{3}{4}\sigma_4 + \frac{3}{8}\sigma_2^2 - \frac{1}{8}\sigma_1^4, \\ I_4 &= +\frac{12}{5}\sigma_5 - 2\sigma_2\sigma_3 + \frac{1}{10}\sigma_1^5, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= -\frac{\pi}{2}\sigma_1, \\ H_2 &= +\frac{\pi}{4}(\sigma_2 + 4\sigma_1^2), \\ H_3 &= -\frac{\pi}{2}(\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_1 + 4\sigma_1^3), \\ H_4 &= +\frac{\pi}{4}\left(6\sigma_4 + 3\sigma_2^2 + 16\sigma_3\sigma_1 + 24\sigma_2\sigma_1^2 + 16\sigma_1^4\right). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Remarquons en passant que les expressions trouvées pour les intégrales I_p et H_p aussi sont homogènes par rapport aux séries σ; mais il n'y a plus de correspondance nette entre les termes des deux expressions.

§ 2.

Applications des formules générales.

4. A l'aide des formules démontrées dans le § 1 on peut déterminer un certain nombre d'intégrales définies plus spéciales, mais assez remarquables. Avant de passer à cette application, il nous semble utile de citer quelques formules élémentaires dont nous aurons besoin plus tard.

Posons

$$S_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^p},$$

$$\tau_p = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^p},$$

et nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\tau_1 = \frac{\pi}{4},\ \tau_3 = \frac{\pi^3}{32},\ \tau_5 = \frac{1}{4!}\frac{5\pi^5}{64},\ \dots \\ &S_2 = \frac{\pi^2}{6},\ S_4 = \frac{\pi^4}{30},\ S_6 = \frac{\pi^6}{945},\ \dots \\ &\sigma_1 = \log 2, \sigma_2 = \frac{\pi^2}{12},\ \sigma_4 = \frac{7\pi^4}{720},\ \dots \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

En outre on démontrera aisément les deux formules suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^p \sin\varphi\, d\varphi = (-1)^p \frac{p!}{2^{p+1}} S_{p+1}, \qquad (\beta)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log^p \cot\varphi\, d\varphi = p!\,\tau_{p+1}, \qquad (\gamma)$$

5. Pour $p = 1$, les formules (10) nous donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}\sigma_2 - \frac{1}{4}\sigma_1^2,$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8}\log^2 2, \qquad (12)$$

tandis que l'on tire de (11) la formule *eulérienne* bien connue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

6. Pour $p = 2$, on ne tire de (10) que la formule (β) correspondant à cette valeur de p. La formule (11), au contraire, nous donne, à l'aide de la formule du binôme et en mettant ensuite dans certaines des intégrales ainsi obtenues $\frac{\pi}{2} - \varphi$ à la place de φ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \sin\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^2}{12} + 4\log^2 2\right),$$

d'où, en vertu de (5),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\log^2 2 - \frac{\pi^2}{24}\right). \tag{13}$$

7. Pour $p = 3$, on tire de (10), en intégrant par parties et en remplaçant ensuite φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^2 \sin\varphi \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{64}\left(\frac{\pi^4}{90} + \log^4 2\right), \tag{14}$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot\varphi \log\sin\varphi \log^2\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{64}\left(\frac{\pi^4}{90} - \log^4 2\right). \tag{15}$$

Si nous mettons dans (15) $\frac{\pi}{2} - \varphi$ à la place de φ, nous aurons, en ajoutant l'équation ainsi obtenue à (14), la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^2 \sin\varphi \log\cos\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{32}\frac{\pi^4}{90} = -\frac{S_4}{32}, \tag{16}$$

d'où l'on tire, en vertu de (β), cette formule curieuse:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^3 \sin\varphi\, d\varphi = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^2 \sin\varphi \log\cos\varphi\, d\varphi. \tag{17}$$

La formule (11), au contraire, nous donne par la méthode habituelle

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^3\sin\varphi\, d\varphi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2\cos\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}(\sigma_3 + 3\sigma_2\sigma_1 + 4\sigma_1^3),$$

d'où, à l'aide de (5),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2\cos\varphi \log\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}S_3 - \log^3 2\right). \tag{18}$$

8. Pour $p = 4$, les formules (10) nous donnent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^2 \cos\varphi \log^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{8}\left(2S_5 - S_3 S_2\right), \tag{19}$$

tandis que l'on tire de (11)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^4 \sin\varphi\, d\varphi + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^3 \cos\varphi \log \sin\varphi\, d\varphi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \cos\varphi \log^2 \sin\varphi\, d\varphi \\ &\quad = \frac{\pi}{4}\left(\frac{19}{240}\pi^4 + 16\sigma_3\sigma_1 + 24\sigma_2\sigma_1^2 + 16\sigma_1^4\right). \end{aligned}\right\} \tag{δ}$$

Dans la formule (δ) l'intégration par parties ne peut pas nous mener plus loin, le facteur $\operatorname{tg}\varphi$ ne figurant pas sous les signes d'intégration. Cependant la formule (γ) pourra nous tenir lieu de cette intégration par parties. On tire en effet de cette formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^4 \sin\varphi\, d\varphi - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^3 \cos\varphi \log \sin\varphi\, d\varphi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \cos\varphi \log^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{5}{64}\pi^5. \tag{ε}$$

Additionnons, puis soustrayons les formules (δ) et (ε), et nous aurons respectivement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^2 \cos\varphi \log^2 \sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi^4}{80} - 2\, S_3 \log 2 + 2 \log^4 2\right), \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\varphi \log^3 \cos\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2} S_3 \log 2 + \frac{\pi^2}{4} \log^2 2 + 2 \log^4 2 - \frac{7}{240}\pi^4\right). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

9. Pour les valeurs plus grandes de p, la méthode employée dans les n^{os} 5-8 ne suffira pas pour déterminer les intégrales correspondantes, mais où entrent des puissances plus hautes de $\log \sin\varphi$ et de $\log \cos\varphi$.

Pour $p = 5$, les formules (10) et (11) nous donnent déjà des intégrales qu'on ne peut déterminer, ni par les formules générales démontrées dans ce mémoire, ni par l'intégration par parties.

Cependant les expressions cherchées pour les intégrales en question deviendront de plus en plus compliquées, de sorte qu'il ne vaudra guère la peine de chercher d'autres méthodes pour tourner ces difficultés — à cause des intégrales mêmes.

Copenhague, septembre 1896.